Résolution de $-u''+u=f$ sur le cercle.

Leçon : 201, 220, 221, 228, 246

Réf. Gabre pour les distributions, Osman ~

On considère l'équation $\begin{cases} -u''+u=f \\ u(0)=u(2\pi) \end{cases}$ $(*)$, $f\in L^2(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

On cherche des solutions faibles de $(*)$, ie $u\in H^1(\mathbb{T})$ tq
$\forall \varphi\in H^1(\mathbb{T}),\ \int_0^{2\pi} u'\varphi' + u\varphi = \int_0^{2\pi} f\varphi.$

Pour $f,g\in L^2(\mathbb{T})$, on note :

- $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$
- $f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt$

Pour $f,g\in \begin{array}{|l} \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \\ \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \end{array}$, on note $f*g$ la convolution au sens classique des distributions.

Lemme 1.
Soit $f\in L^2(\mathbb{T})$. Alors $u\in H^1(\mathbb{T})$ est solution faible de $(*)$ ssi $\forall n\in\mathbb{Z}$, $c_n(u) = \frac{c_n(f)}{1+n^2}$.

<u>Preuve</u> Analyse-Synthèse

<u>Analyse</u>. Soit $u\in H^1(\mathbb{T})$ solution faible de $(*)$. Alors
$\forall \varphi\in H^1(\mathbb{T}),\ \int_0^{2\pi} u'\overline{\varphi'} + u\overline{\varphi} = \int_0^{2\pi} f\overline{\varphi}.$

Comme $\varphi, u, \varphi', u'\in L^2(\mathbb{T})$, on a donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(u')\overline{c_n(\varphi')} + c_n(u)\overline{c_n(\varphi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\overline{c_n(\varphi)}.$$

Or, $c_n(u') = in\,c_n(u)$, donc
$|c_n(\varphi') = in\,c_n(\varphi)$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)c_n(u)\overline{c_n(\varphi)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\overline{c_n(\varphi)}$$

En particulier pour $\varphi = (t \mapsto e^{int})$, on a

$$\forall n \in \mathbb{Z},\quad c_n(u) = \frac{c_n(f)}{1+n^2}.$$

De plus, la série de Fourier $\sum c_n(u)e^{in\cdot}$ CVS car elle converge normalement, soit $x\in\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n(u)e^{inx}| = \sum_{n=-N}^{N} \frac{|c_n(f)|}{1+n^2}$$

$$\leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{1+n^2}\right)^2\right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2\right)^{1/2}}_{=\|f\|_2,\ f\in L^2(\mathbb{T}).}$$

(ou juste : $|c_n(f)| \leq \|f\|_2$). Donc $u(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{inx}c_n(f)}{1+n^2}$ $\forall x$

car f continue.

Synthèse

. u bien définie
. $u \in H^1(\mathbb{T})$ car $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T}) \subset H^1(\mathbb{T})$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\frac{in\,c_n(f)}{1+n^2} e^{inx}\right| \leq \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{n}{1+n^2}\right)^2\right)^{1/2} \|f\|_2 \quad (\text{C-S}).$$

. u est bien une solut° faible par construction.
(on calcule $\int_0^{2\pi} u'\overline{\varphi'} + u\overline{\varphi} = \dots = \int_0^{2\pi} f\overline{\varphi}$ $\forall \varphi \in H^1(\mathbb{T})$).

□

Théorème 2

Soit $\left| \begin{array}{l} T : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) \\ f \mapsto Tf \end{array} \right.$, où Tf est l'unique solution de

(*) associée à f. Alors $Tf = K * f$, où

$$K(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} +$$

Preuve

On pose $K(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e^{imx}}{1+m^2}$, et $f \in L^2(\mathbb{T})$.

Alors $\forall m \in \mathbb{Z}$, $c_m(Tf) = c_m(K) c_m(f)$

$$= c_m(K \overset{\mathbb{T}}{*} f).$$

Par injectivité des séries de Fourier, $Tf = K \overset{\mathbb{T}}{*} f$.

On va maintenant résoudre $-u'' + u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Pour cela, on cherche une solution élémentaire de l'opérateur $P = -\Delta + 1$, ie on cherche $e \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tq $P(e) = \delta_0$, ie $-e'' + e \overset{(**)}{=} \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Sur $\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_-^* \\ \mathbb{R}_+^* \end{array} \right.$, on a $e'' = e$. Il existe donc $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ cste

tq $\left\{ \begin{array}{l} e(x) = \alpha e^{x} + \beta e^{-x} \ \forall x > 0. \\ e(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x} \ \forall x < 0 \end{array} \right.$

On e doit vérifier $(**)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, donc par la formule des sauts $e'' = e + (e(0^+) - e(0^-))\delta_0' + (e'(0^+) - e'(0^-))\delta_0$

$$= e + (\alpha + \beta - \lambda - \mu)\delta_0' + (\alpha - \beta - \lambda + \mu)\delta_0$$

donc $\begin{cases} \alpha+\beta-\lambda-\mu=0 \\ \alpha-\beta-\lambda+\mu=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha-\lambda=-1/2 \\ \beta-\mu=1/2 \end{cases}$.

Ainsi il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tq $e(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} + a\,\mathrm{ch}(x) + b\,\mathrm{sh}(x)$.

Donc e est une fonction, et on a donc, comme e est une solution élémentaire de P,

$$P(e*f) = f, \text{ ie } e*f \text{ est solution.}$$

~~Par unicité dans le lemme 1, on a~~

$$\cancel{\forall f \in L^2(\mathbb{T}) \quad e*f = K \overset{\mathbb{T}}{*} f}$$

~~Donc~~

En restreignant à $\mathbb{T}$ et en imposant que $e(0)=e(2\pi)$, il vient que $e*f$ est solution de $\begin{cases} -u''+u=f \\ u(0)=u(2\pi) \end{cases}$

Par unicité dans le lemme 1, il vient $e*f = K \overset{\pi}{*} f \ \forall f \in L^2(\mathbb{T})$.

Donc, comme $K \overset{\pi}{*} f = \frac{1}{2\pi} K*f$, il vient

$$e = \frac{1}{2\pi}K.$$

Or K est pair, donc nécessairement $b=0$, et comme $e(0)=e(2\pi)$, on a $\frac{1}{2} + a = \frac{1}{2}e^{-2\pi} + a\,\cancel{e^{2\pi}}\,\mathrm{ch}(2\pi)$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-2\pi}-1}{1-\mathrm{ch}(2\pi)} = \frac{1-e^{-2\pi}}{\mathrm{sh}(\pi)^2}$$

Ainsi $Tf = e * f$, avec $e(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} + \frac{1}{2} \frac{e^{-2\pi}-1}{1-ch(2\pi)} ch(x)$.

$\square$

Comme $K = (2\pi)e$, on a en particulier

$$K(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2} = (2\pi) e(0)$$

$$= \pi \left(1 + \frac{e^{-2\pi} - 1}{1 - ch(2\pi)} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{\cancel{1} - ch(2\pi) + e^{-2\pi} \cancel{-1}}{1 - ch(2\pi)} \right)$$

$ch(2\pi) = \frac{1}{2}(e^{2\pi} + e^{-2\pi})$

$1 - ch(2\pi) = -2\, sh^2(\pi)$

$$\cancel{= \frac{\pi}{2} \frac{1 - e^{2\pi} - e^{-2\pi} + 2 e^{2\pi} - 1}{-2\, sh^2(\pi)}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi} - 2e^{-2\pi}}{2\, sh^2(\pi)} = \pi \frac{sh(2\pi)}{2\, sh^2(\pi)}$$

$sh(2\pi) = 2\, sh(\pi) ch(\pi)$

$$= \pi \frac{ch(\pi)}{sh(\pi)}$$

$$= \pi\, cotanh(\pi). \quad :)$$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}\, cotanh(\pi/a).$$